Partie I : Jeux et équilibre de Nash

Nicolas Carayol

M1 MIMSE

Introduction

- La théorie des jeux peut se concevoir comme une theorie des comportement d'agents rationnels en situation d'interaction.
- Les joueurs sont *rationnels* : ils poursuivent des objectifs exogènes et indépendants (ici jeux non-coopératifs vs jeux coopératifs) ;

Jeu en forme normale

Définition

Un **jeu en forme normale** $\left\langle I, (S_i)_{i \in I}, (u_i(\cdot))_{i \in I} \right\rangle$ *est donné par :*

- *Un ensemble I de $n \geq 1$ joueurs, indexés par $i = 1, 2, \ldots n$;*
- *Un ensemble de stratégies S_i pour chaque joueur i qui peut choisit une stratégie (pure) s_i. Le vecteur $s \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est le* **résultat** *(ou* **profil de stratégies***) avec $s \in S$, l'ensembe des profils de stratégies.*
- *Une* **fonction de gain** *pour chaque joueur i, $u_i : S \to \mathbb{R}$*

Le dilemme du prisonnier

- Un jeu non–coopératif avec $n = 2$ joueurs, $I = \{1, 2\}$
- L'ensemble de stratégies de chaque joueur : $S_1 = S_2 = \{C, D\}$

Définition

- 4 *résultats possibles du jeu :*

$$S = \{(C, C), (C, D), (D, D), (D, C)\}.$$

- Gains symétriques :
  - $u_1(C, C) = u_2(C, C) = -1,$
  - $u_1(C, D) = -10,\ u_2(C, D) = 0,$
  - $u_1(D, C) = 0, u_2(D, C) = -10,$
  - $u_1(D, D) = u_2(D, D) = -8.$

DP - Matrice du jeu II

		2	
		C	D
1	C	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
	D	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

TABLE: Dilemme du prisonnier

Notation

Le profil de stratégies $s = (s_i, s_{-i})$ *(*$\forall i \in I$*) avec*

$$s_{-i} = \left(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\right), \quad s_{-i} \in \underset{j \neq i}{\times} S_j.$$

Définition

La stratégie s_i du joueur i est **strictement dominée** *par la stratégie s_i' si et seulement si,* **quel que soit le comportement des autres joueurs***, le joueur i obtient avec s_i une utilité strictement inférieure à celle obtenue avec s_i'*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i\left(s_i, s_{-i}\right) < u_i\left(s_i', s_{-i}\right)$$

Définition

La stratégie s_i est **faiblement dominée** *par s_i' si l'inégalité est faible pour toutes les stratégies des autres joueurs et qu'il existe au moins un profil de stratégies des autres joueurs pour lequel l'utilité avec p_i est strictement inférieure à celle avec s_i' :*

$$\begin{gathered}\forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \leq u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \\ \textit{et}\ \exists s_{-i} \in S_{-i} \mid u_i\left(s_i, s_{-i}\right) < u_i\left(s_i', s_{-i}\right)\end{gathered}$$

Dilemme du prisonier

		2	
		N	D
1	N	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Stratégies dominantes

Définition

Une stratégies s_i' est une stratégies strictement dominante si

$$\forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i\left(s_i, s_{-i}\right) < u_i\left(s_i', s_{-i}\right)$$

Définition

Une stratégies s_i' est une stratégies faiblement dominante si :

$$\begin{aligned} &\forall s_i \in S_i : \\ &\quad \forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \leq u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \\ &et\ \exists s_{-i} \in S_{-i} \mid u_i\left(s_i, s_{-i}\right) < u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \end{aligned}$$

Equilibre en stratégies dominantes

Définition

Un profil de stratégies s' est un équilibre en stratégies dominantes strict si

$$\forall i \in I, \forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i\left(s_i, s_{-i}\right) < u_i\left(s_i', s_{-i}\right)$$

Définition

Un profil de stratégies s' est un équilibre en stratégies (faiblement) dominantes si :

$$\begin{aligned} \forall i \in I : \forall s_i \in S_i, \\ \forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \leq u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \\ et\ \exists s_{-i} \in S_{-i} \mid u_i\left(s_i, s_{-i}\right) < u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \end{aligned}$$

Equilibre de Nash

Définition

Un profil $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ $(s_i^* \in S_i, i = 1 \ldots n)$ *est* **un équilibre de Nash** *si aucun joueur n'a intérêt à* **dévier unilatéralement** *de sa stratégie* p_i^* *(quand les autres joueurs continuent à jouer le profil* p_{-i}^**) :*

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right),\ \forall s_i \in S_i,\ \forall i = 1 \ldots n.$$

Définition

p^* *est un* **équilibre de Nash strict** *si*
$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) > u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right),\ \forall s_i \in S_i \setminus \left\{s_i^*\right\},\ \forall i = 1 \ldots n.$

- Si l'équilibre de Nash est strict, en dévier doit avoir un coût pour les joueurs.

		2	
		C	D
1	C	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Table: Dilemme du prisonnier

La Bataille des sexes

		2	
		B	b
1	B	$(2,1)$	$(0,0)$
	b	$(0,0)$	$(1,2)$

Définition

Une **stratégie mixte** *du joueur i est une mesure de probabilités p_i définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i ($\sum_{s_i} p_{i,s_i} = 1$). On note P_i l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i. p_{i,s_i} est la probabilité que i joue le stratégie pure s_i. $p_i \in P_i$ correspond donc à une stratégie mixte du joueur i.*

Stratégies mixtes

Stratégies mixtes : $p_1 = (q, 1-q)$ et $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$.
$\rightarrow$ q est la fréquence du choix de la stratégie N par 1
$\rightarrow$ t est la fréquence du choix de N par 2.

Equilibre de Nash

Définition

Un profil $p^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ $(p_i^* \in P_i, i = 1...n)$ *est* **un équilibre de Nash en stratégies mixtes** *si*

$$u_i\left(p_i^*, p_{-i}^*\right) \geq u_i\left(p_i, p_{-i}^*\right),\ \forall p_i \in P_i,\ \forall i = 1 \ldots n. \qquad (1)$$

Fonctions de meilleures réponses

Déterminer les stratégies du joueur i qui correspondent à la plus grande satisfaction pour lui face à tout profil s_{-i}.

Definition

Dans un jeu à n joueurs, **la fonction de meilleure réponse** du joueur i, $R_i(p_{-i})$ associe, à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs p_{-i}, la (les) stratégie(s) du joueur i qui maximise(nt) son gain :

$$u_i(R_i(p_{-i}), p_{-i}) \geq u_i(p_i, p_{-i}), \ \forall p_i \in P_i, p_{-i} \in P_{-i}.$$

Illustration en strategies pures avec la Dilemme du prisonnier

		2	
		C	D
1	C	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Illustration en strategies pures avec la Bataille des sexes

		2	
		B	b
1	B	$(2,1)$	$(0,0)$
	b	$(0,0)$	$(1,2)$

De manière plus générale :

Proposition

p^* est un équilibre de Nash si et seulement si
$p_i^* \in R_i\left(p_{-i}^*\right), \quad \forall i = 1...n.$

Preuve : Par définition, $R_i\left(p_{-i}^*\right)$ maximise $u_i\left(p_i, p_{-i}^*\right)$, pour tout joueur $i \rightarrow$ Aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie p_i^*.

- Recherche des équilibres de Nash est opérée en pratique par la recherche des points d'intersection entre les fonctions de meilleures réponses de tous les joueurs (comme dans l'oligopole de Cournot).

Meilleures réponses en stratégies mixtes

Stratégies mixtes des deux joueurs : $p_1 = (q, 1-q)$ et $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$.

			2	
			t	$1-t$
			B	b
1	q	B	$(2, 1)$	$(0, 0)$
	$1-q$	b	$(0, 0)$	$(1, 2)$

TABLE: Bataille des sexes et stratégies mixtes

Comparons alors l'espérance d'utilité de 1 pour ses deux stratégies :

$$\text{si } B : U_1^B(p_1, p_2) = U_1((1, 0), (t, 1-t)) = 2t + 0(1-t) = 2t$$

$$\text{si } b : U_1^b(p_1, p_2) = U_1((0, 1), (t, 1-t)) = 0t + 1(1-t) = 1-t$$

Meilleures réponses en stratégies mixtes

Face à la stratégie mixte p_2 de 2, 1 choisira B si :

$$2t > 1 - t \Rightarrow t > \frac{1}{3}.$$

$\rightarrow$ La fonction de meilleure réponse de 1 :

$$R_1(t) = q^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } t > 1/3 \\ [0,1] & \text{Si } t = 1/3 \\ 0 & \text{Si } t < 1/3. \end{cases}$$

Et pour 2 :

$$B : U_2^B(p_1, p_2) = U_2((q, 1-q), (1, 0)) = 1q + 0(1-q) = q$$

$$b : U_2^b(p_1, p_2) = U_2((q, 1-q), (0, 1)) = 0q + 2(1-q) = 2 - 2q$$

Meilleures réponses en stratégies mixtes

Face à la stratégie mixte p_1 de 1, 2 choisira B $(t = 1)$ si :

$$U_2^B(p_1, p_2) > U_2^b(p_1, p_2)$$

C'est à dire si :

$$q > 2 - 2q \leftrightarrow q > \frac{2}{3}.$$

La fonction de meilleure réponse de 2 est :

$$R_2(q) = t^*(q) = \begin{cases} 1 & \text{Si } q > 2/3 \\ [0,1] & \text{Si } q = 2/3 \\ 0 & \text{Si } q < 2/3. \end{cases}$$

Représentation graphique

Tp : représentation graphique des fonctions de meilleures réponse.

Meilleures réponses en stratégies mixtes : autre exemple

Autre exemple

		2	
		a	b
1	a	$(2,2)$	$(1,3)$
	b	$(3,1)$	$(0,0)$

TABLE: Stratégies mixtes

Ensemble des *EN* en stratégies mixtes ?

Meilleures réponses en stratégies mixtes : autre exemple

Autre exemple

		2	
		a	*b*
1	*a*	$(3,3)$	$(0,2)$
	b	$(0,1)$	$(1,1)$

TABLE:

Exercice : Calculer le(s) équilibre(s) de Nash en stratégies mixtes de ce jeu (s'il en existe).

Jeu en forme extensive

Définition

Un **jeu en forme extensive** $\left\langle I, A, \psi\left(\cdot\right), \Lambda, \left(\lambda_i\right)_{i\in I}, \left(S_i\right)_{i\in I}, \rho, \left(u_i\left(\cdot\right)\right)_{i\in I}\right\rangle$ *est donné par*

- *Un ensemble I de $n \geq 1$ joueurs, indexés par $i = 1, 2, \ldots n$.*
- *Un ensemble de noeuds A, comprenant la racine a_0. Le sous ensemble $A_w \subset A$ rassemble les noeuds terminaux. Les autres noeuds A_d sont les noeuds de décision.*
- *Une fonction donnant le prédécesseur (unique) pour tout noeud différent de la racine $\psi : A \backslash \left\{a_0\right\} \to A_d$.*
- *Une partition de l'ensemble des noeuds de décision A_d sur l'ensemble des joueurs indiquant, pour chaque noeud de décision, le joueur qui joue : $\Lambda = \left(\Lambda_1, ..., \Lambda_n\right)$. $\Lambda_1 =$ ensemble des noeuds de décision du joueur 1.*

Jeu en forme extensive

Définition

- *Pour chaque joueur i, une partition λ_i $(\lambda_{i1}, ..., \lambda_{in_i})$ de son Λ_i en n_i ensembles d'information h_j ($h_j \in H_i$ l'ensemble des ensembles d'information du joueur i) avec la condition que tous les noeuds d'un même ensemble d'information aient le même nombre de branches.*
- *Des probabilités sur d'éventuels mouvements aléatoires (joués par la Nature) : ρ.*
- *La spécification des gains de chaque joueur à chaque noeud terminal : Une* **fonction de gain** *pour chaque joueur i, $u_i : A_w \to \mathbb{R}$*

Information imparfaite

- Si un joueur ne connaît pas les choix effectués par les joueurs qui ont joué avant lui, il ne connaît pas parfaitement le noeud sur lequel il se situe.
- Si, à un moment donné, il ne peut distinguer deux noeuds, ces deux noeuds appartiennent au même **ensemble d'information.**

Définition

Un jeu en forme extensive est

1. *un jeu avec* **information imparfaite** *si au moins un ensemble d'information contient plus d'un noeud ;*
2. *un jeu avec* **information parfaite** *si chaque ensemble d'information est réduit à un seul noeud.*

Stratégies pures

- Une **stratégie pure** : spécification d'une action pour un joueur chaque fois qu'il est susceptible de j
ouer.
- Dans un jeu en forme normale : une *stratégie* d'un joueur i consiste en la détermination d'un s_i.
- Dans un jeu en forme extensive : une *stratégie* d'un joueur i est une application s_i qui attribue à chaque ensemble d'information h_j ($\in H_i$) du joueur i une action qu'il est susceptible de choisir dans cet ensemble d'information.
- Un *profil de stratégies* (résultat) $\rightarrow$ spécification d'un déroulement complet du jeu en précisant une stratégie par joueur.

Strategies pures dans un jeu sequentiel : Exemple

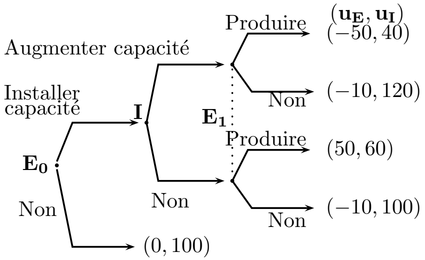

FIGURE: Le jeu de l'entrée II

Tiré de Yildizoglu (2011)

Donnez la représentation sours forme normale de ce jeu ?

Stratégies dans un jeu en forme extensive - II

Définition

Une **stratégie locale** *du joueur i est similaire à une stratégie mixte, sauf qu'elle est définie au niveau d'un ensemble d'information (au lieu du jeu global). Pour un joueur i, elleéfinit d par conséquent, pour un ensemble d'information h_j, une mesure de probabilités sur l'ensemble des actions disponibles en cet ensemble d'information. On la note par π_{ih_j} (la stratégie locale du joueur i à son ensemble d'information h_j) et Π_{ih_j} est l'ensemble des stratégies locales de i pour l'ensemble d'information h_j.*

Stratégies dans un jeu en forme extensive - III

Définition

Une **stratégie comportementale** *du joueur i est un vecteur de stratégies locales de ce joueur, contenant une stratégie locale pour chaque ensemble d'information de ce joueur. On la note par π_i et Π_i est l'ensemble des stratégies comportementales du joueur i.*

Concepts de stratégies :

- stratégies pures (pour jeux en forme stratégique et extensive) ;
- stratégies mixtes (pour jeux en forme stratégique et extensive) ;
- stratégies locales (pour jeux en forme extensive) ;
- stratégies comportementales (pour jeux en forme extensive).

Non-existence de l'équilibre de Nash en stratégies pures

- Il n'existe pas nécessairement un équilibre de Nash en stratégies pures.
- Exemple

		2	
		B	b
1	B	$(2,0)$	$(0,2)$
	b	$(0,1)$	$(1,0)$

TABLE: Bataille des sexes II

Conditions d'existence

Théorème

Tout jeu sous forme normale $\langle I, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I} \rangle$ *a au moins un équilibre de Nash en stratégies pures s'il vérifie les conditions suivantes*

- *L'ensemble des stratégies est un sous espace Euclidien* ($S_i \subseteq \mathbb{R}^K, K \in \mathbb{N}$) *non vide, compact et convexe*
- *Les fonctions d'utilité* $u_i(\cdot) : S \to \mathbb{R}$ *sont continues*
- *Les fonctions d'utilité* $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \to \mathbb{R}$ *sont quasi-concaves* $\forall s_{-i} \in S_{-i}$.

Démonstration.

Le théorème du point fixe (Kakutani, 1941) s'applique à la correspondance des meilleures réponses $R : S \to S$ □

- $\to$ Intersection des fonctions de meilleure réponse assurée.

Théorème

(Nash) *Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash si les stratégies mixtes sont autorisées.*

Démonstration.

Stratégies mixtes dans un jeu fini $\rightarrow$ elles sont définies dans l'intervalle fermée $[0, 1]$, et sur un support fini (S_i) $\rightarrow$ compacité et convexité $\rightarrow$ Théorème de Nash. $\square$

Bien-être social

- Un concept d'équilibre implique un mécanisme particulier de coordination des stratégies individuelles. Dans l'équilibre de Nash, chaque joueur cherche à améliorer sa situation individuelle unilatéralement.
- L'équilibre de Nash est-il un mécanisme de coordination efficace au sens de Pareto ?

Optimum de Pareto

Définition

Efficacité au sens de Pareto.

1. *Le résultat* $\hat{s}$ **Pareto-domine** *le résultat* s *si :*

$$u_i(\hat{s}) \geq u_i(s), \; \forall i \quad et$$
$$\exists\, j, \; u_j(\hat{s}) > u_j(s).$$

2. *Un résultat* s^* *est un* **optimum de Pareto** *s'il n'existe pas un autre résultat qui le Pareto-domine.*
3. *Les résultats* $\hat{s}$ *et* s *ne sont pas* **Pareto-comparable** *si*

$$\exists i, \quad u_i(\hat{s}) > u_i(s) \; et \; \exists\, j \neq i, \; u_j(\hat{s}) < u_j(s).$$

Exemple

		2	
		C	D
1	C	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Optimum de Pareto ?

Exemple

		2	
		C	D
1	C	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Dilemme du prisonnier : (D, D) est un équilibre de Nash mais (N, N) Pareto-domine cet équilibre.

Proposition

Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.

Application : Jeu de pollution

- Jeu de pollution simultané avec stratégies $(s_i)_{i \in N}$ continues $\in \mathbb{R}^+$ et la fonction de paiement :

$$u_i(s_1, ..., s_n)) = v(s_i) - \sum_j s_j,$$

avec $v' > 0, v'' < 0$ et $v'(0) > 1$.

Application : Jeu de pollution

- Solution : chaque agent max son paiement individuellement :

$$\max_{s_i}\left(v(s_i)-\sum_j s_j\right)\rightarrow v'(s_i)=1.$$

- Chaque agent a une (unique) action dominante.
- Le profil de stratégies caractérisé par $v'(s_i)=1, \forall i \in N$ est donc son unique EN.

Application : Jeu de pollution

- Si l'objectif est de maximiser le bien être social :

$$\max_{s_i, \forall i \in N} \sum_i \left(v(s_i) - \sum_j s_j \right) \rightarrow v'(s_i) = n$$

- Les EN ne maximisent pas le bien-être social
- Les EN ne sont pas des optimas de pareto.
- Quel mécanisme pour implémenter la solution optimale à l'EN ?

Application : Jeu de pollution

- Si l'on introduit un taux θ de taxe (dite pigouvienne) linéaire en $s_i \rightarrow$

$$\hat{u}_i(s_1, ..., s_n)) = v(s_i) - \sum_j s_j - \theta s_i + \frac{\theta}{n} \sum_j s_j$$

- A l'équilibre de Nash :

$$v'(s_i) = 1 + \theta \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

- Or maximiser le bien être social implique : $v'(s_i) = n$
- Le mécanisme : fixer la taxe telle que

$$n = 1 + \theta \left(\frac{n-1}{n} \right).$$

Application : compétition spatiale

Application : compétition spatiale

- $N = 2$
- $S_1 = S_2 = [0; 1]$
- $u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + x_2)/2 \text{ si } x_1 < x_2 \\ [1 - (x_1 + x_2)]/2 \text{ si } x_1 > x_2 \\ 1/2 \text{ si } x_1 = x_2 \end{cases}$
- $u_2(x_1, x_2)$ symétrique
- EN ?

Information incomplète et jeux Bayesiens

- L'hypothèse de base des jeux à information complète est que tous les joueurs sont parfaitement informés des règles du jeu.
- Or, les joueurs ont souvent une connaissance imparfaite des caracteristiques des autres joueurs ou même de certaines conditions du jeu.

L'idée de base

Exemple : mais qui est votre partenaire ?

		2.a	
		B	b
1	B	$(2,3)$	$(0,0)$
	b	$(1,2)$	$(3,1)$

		2.b	
		B	b
1	B	$(2,1)$	$(0,2)$
	b	$(1,2)$	$(3,3)$

TABLE: Bataille des sexes en info incomplete

- Le joueur 1 ignore l'identité du joueur 2.
- Le joueur 2 connaît ses préférences et a une stratégie dominante.
- Le joueur 1 attribue la probabilité p à l'éventualité que le joueur 2 soit de type 2.a et $1-p$ qu'il soit de type 2.b.
- si : $2p + 0(1-p) > 1p + 3(1-p) \rightarrow 1$ joue B.
- C'est le principe du Bayesian Nash Equilibrium.

L'idée de base

- Tout jeu en information incomplète peut être représenté comme un jeu à infomation imparfaite dans lequel la nature joue en premier un coup qu'un agent au moins ne peut pas observer.
- Exemple : information asymetrique privé d'un joueur = situation dans laquelle la nature à attribué un type à un joueur que l'autre ne peut observer.
- Exemple : transformer le jeu de la bataille des sexes à information incomplète !

Remarque

- Harsanyi (1973) montre que tout équilibre de Nash (notamment en stratégies mixtes) d'un jeu sous forme normale peut "presque toujours" être obtenu comme la limite d'un équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu perturbé à information incomplète (où les joueurs sont incertains sur les paiements des autres) quand les perturbations (incertitudes a priori, types) tendent vers 0.

Jeux bayésiens

- Lorsque l'incertitude porte sur une caractéristique d'un joueur, les différents états de la nature portent sur les types des joueurs.
- Quand l'incertitude porte sur une autre caractéristique du jeu, il est quand même le plus souvent possible d'écrire les gains du jeu comme dépendant de types des joueurs.
- Les types de i, t_i, et des autres joueurs t_{-i}
- La distribution de probabilités sur les types des autres sachant son propre type et ses croyances $p_i\left(t_{-i}\,|t_i\right)$
- Si les attributions des types sont indépendants : $p_i\left(t_{-i}\,|t_i\right) = p_i\left(t_{-i}\right)$

Jeux bayésiens

Definition

Un jeu bayésien statique en forme normale est décrit par : · Un ensemble de n joueurs : $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. · Pour chaque joueur i, $i \in I$, un ensemble d'actions A_i et un ensemble de types possibles T_i. $A = \underset{i \in I}{X} A_i$ et $T = \underset{i \in I}{X} T_i$. · Pour chaque joueur i, une fonction de gain, u_i $\rightarrow$ les préférences (VNM) du joueur i :

$$\begin{aligned} u_i : \quad & S = A \times T \rightarrow \mathbb{R} \\ & s \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto u_i(a, t) . \end{aligned}$$

Jeux bayésiens

Definition

(suite) · Une distribution de probabilité a priori p_i pour tout $i \in I$ qui donne les croyances des agents quant aux types des autres agents :

$$\begin{aligned} p_i : \quad & T \to [0,1] \\ & (t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto p_i\left(t_{-i} \,|\, t_i\right). \end{aligned}$$

qui résulte de la règle de bayes lorsque celle-ci peut être appliquée (memo : $\Pr(a|b) = \frac{\Pr(a)\Pr(b|a)}{\Pr(b)}$)

Jeux bayésiens

Definition

Une stratégie (pure) s_i du joueur i précise une action pour chaque type :

$$\begin{aligned} s_i : \quad & T_i \rightarrow A_i \\ & t_i \mapsto s_i(t_i) = a_i. \end{aligned}$$

Le profil de stratégies (pures) est donné par $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Jeux bayésiens

- Une stratégie pour i est
  - séparatrice si $s_i(t_i) \neq s_i(t_i'), \forall t_i \neq t_i' \in T_i$,
  - mélangeante (pooling) si $s_i(t_i) = s_i(t_i'), \forall t_i \neq t_i' \in T_i$
- Les déductions que l'on peut inférer quant à leurs types au vu de leurs choix sont très différentes.

Equilibre de Nash bayésien

Definition

L'équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu bayésien est un profil de stratégies $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ tel que, $\forall i \in I, \forall t_i \in T_i$:
$s_i^*(t_i) = \arg\max_{s_i \in S_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i\left(s_{-i}^*(t_{-i}), s_i; t\right) \times p_i\left(t_{-i} \,|t_i\right),$

avec :

$s_{-i}(t_{-i}) = (s_1(t_1), s_2(t_2), \ldots s_{i-1}(t_{i-1}), s_{i+1}(t_{i+1}), ..., s_n(t_n))\,.$

- Notion que l'on peut étendre aux stratégies mixtes $\sigma_i^*(t_i)$.

Bataille des sexes avec information incomplète

Equilibre :

- $s_2^*(t_{2.a}) = B; s_2^*(t_{2.b}) = b$ (stratégie séparatrice)
- $s_1^*(t_1) = \begin{cases} B \quad \text{si} \quad p > 3/4 \\ (x, 1-x), \forall x \in [0,1] \ \text{si} \ p = 3/4 \\ b \quad \text{si} \quad p < 3/4 \end{cases}$

Duopole de Cournot en information incomplète

- $Q = A - p$,
- $\pi_i\left(q_1, q_2\right) = \left(p - c_i\right) q_i = \left(A - q_1 - q_2 - c_i\right) q_i$.
- $I = \left\{1, 2\right\}$.
- $T_1 = \left\{t_1\right\}$, $T_2 = \left\{t_{2.a}, t_{2.b}\right\}$
- $\Pr(t_{2.a}) = P\left(c_2 = \underline{c}\right) = \alpha = 1 - \Pr(t_{2.b}) = 1 - P\left(c_2 = \overline{c}\right)$ avec $\underline{c} < c_1 < \overline{c}$.

Duopole de Cournot en information incomplète

- La fonction de réaction de la firme 2 :
  - $\max_{q_2} \left(A - q_1 - q_2 - \underline{c}\right) q_2$, si $t_2 = t_{2.a}$ ou
  - $\max_{q_2} \left(A - q_1 - q_2 - \overline{c}\right) q_2,\ t_2 = t_{2.b}$
- $\rightarrow q_2^* \left(q_1, \underline{c}\right) = \frac{A - q_1 - \underline{c}}{2}$
- $\rightarrow q_2^* \left(q_1, \overline{c}\right) = \frac{A - q_1 - \overline{c}}{2}$
- Stratégie séparatrice

Duopole de Cournot en information incomplète

- La fonction de réaction de la firme 1 incorpore une incertitude sur la fonction de réaction de 1 :
  $\max_{q_1} \alpha \left(A - q_1 - q_2^* \left(q_1, \underline{c}\right) - c_1\right) q_1$
  $+ (1-\alpha)\left(A - q_1 - q_2^* \left(q_1, \overline{c}\right) - c_1\right) q_1$
  ou $\max_{q_1} \left(A - q_1 - E_1\left(q_2^*\right) - c_1\right) q_1$
  avec $E_1\left(q_2^*\right) = \alpha \frac{A - q_1 - \underline{c}}{2} + (1-\alpha) \frac{A - q_1 - \overline{c}}{2} = \frac{A - q_1 - E_1(c_2)}{2}$

Duopole de Cournot en information incomplète

L'équilibre

- $q_1^*(q_2) = \frac{A - E_1(q_2) - c_1}{2}$
- $E_1(q_2^*) = \frac{A - q_1 - E_1(c_2)}{2}$
- Donne $q_1 = \frac{A + q_1 + E_1(c_2) - 2c_1}{4} \rightarrow q_1^* = \frac{A + E_1(c_2) - 2c_1}{3}$
- La quantité proposée par 1 tient compte de ses croyances sur 2

Duopole de Cournot en information incomplète

L'équilibre

- $q_2^*(\overline{c}) = \frac{A - \frac{A+E_1(c_2)-2c_1}{3} - \overline{c}}{2} = \frac{2A - E_1(c_2) + 2c_1 - 3\overline{c}}{6}$
- $q_2^*(\underline{c}) = \frac{A - \frac{A+E_1(c_2)-2c_1}{3} - \underline{c}}{2} = \frac{2A - E_1(c_2) + 2c_1 - 3\underline{c}}{6}$
- $q_2^*(\overline{c}) < q_2^*(\underline{c})$

Duopole de Cournot en information incomplète

L'équilibre

- $q_2^*(\overline{c}) > q_2^{**}(\overline{c})$ en information complète
- $q_2^*(\underline{c}) < q_2^{**}(\underline{c})$ en information complète

Duopole de Cournot en information incomplète

- Dans l'EN avec information incomplète, la firme 2 :
  - si elle a des coûts élevés, elle produit plus que ses quantités de cournot en information complète,
  - si elle a des coûts faibles, elle produit moins que ses quantités de cournot en information complète