Enchères : quelques prolongements

Nicolas Carayol

5 juin 2012

Enchères à valeurs interdépendantes

- Il y a désormais N enchérisseurs qui ont un signal privé $X_i \in [0, \omega_i]$
- Mais leur valeur privée est désormais

$$V_i = v_i(X_1, ..., X_N),$$

avec $v_i(0, ..., 0) = 0$, $E[V_i] < \infty$, $\frac{\partial V_i}{\partial X_i} > 0, \frac{\partial V_i}{\partial X_j} \geq 0, \forall j \neq i$.

- Cas extrêmes :
  - Valeurs privées : $v_i(\mathbf{X}) = X_i$
  - Valeur commune : $v_i(\mathbf{X}) = v(\mathbf{X})$.

The winner's curse

- Supposons pour simplifier une enchère au premier prix sous plis privé à valeur interdépendante
- Le découverte que l'on a remporté l'enchère est une "mauvaise nouvelle" :

$$E\left[V_i \,|X_i = x, Y_i < x\right] < E\left[V_i \,|X_i = x\right]$$

- Les enchères (ou plutôt leur absence) peuvent désormais apporter de l'information et l'enchère ascendante devient qualitativement différente de l'enchère sous plis scellé.

Signaux non indépendants

- Les $X_i, \forall i = 1...N$ sont supposés affiliés (forme forte de corrélation positive)
- $G\left(\cdot\left|x\right.\right)$ est la distribution conditionnelle de Y_i sachant $X_i = x$
- si $x > x'$: $\forall y$,

$$\frac{g\left(y\left|x'\right.\right)}{G\left(y\left|x'\right.\right)} \geq \frac{g\left(y\left|x\right.\right)}{G\left(y\left|x\right.\right)}$$

et :

$$E\left[h\left(Y_i\right)\left|X_i = x'\right.\right] \geq E\left[h\left(Y_i\right)\left|X_i = x'\right.\right]$$

Le modèle symétrique

- Supposons que les agents soient symétriques au sens suivant :

$$v_i(\mathbf{X}) = u(X_i, \mathbf{X}_{-i})$$

(les signaux des autres peuvent être échangés sans que cela ne change ma valeur.

- La fonction

$$v(x, y) \equiv E[V_i \,|X_i = x, Y_i = y]$$

est telle que $v'_y \geq 0; v'_x > 0$.

Equilibre de l'enchère au second prix

Theorem

L'équilibre symétrique de l'enchère au second prix symétrique est tel que :

$$\beta^{esp}(x) = v(x, x).$$

Preuve :

- Supposons que les autres agents suivent $\beta^{esp}(x)$.
- Le gain espéré de i, s'il enchérit b et lorsque son signal est x est donné par

$$\begin{aligned} \pi(b, x) &= \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x, y) - \beta(y))\, g(y\,|x)dy \\ &= \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x, y) - v(y, y))\, g(y\,|x)dy \end{aligned}$$

Equilibre de l'enchère au second prix

- Or si $x > y$, $v(x,y) - v(y,y) > 0$; et si $x < y$, $v(x,y) - v(y,y) < 0$. Donc :

$$\pi\,(b,x) = \int_0^x |v(x,y) - v(y,y)|\, g(y\,|x\,)dy - \int_x^{\beta^{-1}(b)} |v(y,y) - v(x,y)|\, g(y\,|x\,)dy$$

- $\pi\,(b,x)$ est maximisé lorsque b est fixé tel que $\beta^{-1}(b) = x$, cad lorsque $b = \beta(x)$ car $v'_x > 0$.

Equilibre de l'enchère au second prix

Theorem

L'équilibre symétrique de l'enchère au second prix symétrique est tel que :

$$\beta^{esp}(x) = v(x, x).$$

Interprétation :

- Un joueur, disons i, de signal x, enchérit un montant $\beta^{esp}(x)$ tel que s'il gagnait le bien avec cette l'enchère, cad si la plus grande enchère alternative serait $\beta^{esp}(x)$, cela serait juste rentable. Cela signalerait en effet que $Y_i = x$, ce qui l'amènerai à réviser son estimation de la valeur de l'objet de la manière suivante :

$$E[V_i | X_i = x, Y_i = x] = v(x, x) = \beta^{esp}(x)$$

Equilibre de l'enchère ascendante ouverte au premier prix

- Désormais, l'information relative au agents qui ne "suivent pas", et le niveau de prix auquel ils abandonnent devient disponible aux enchérisseurs.
- Une stratégie est donc donnée par $\beta = \left(\beta^N, \beta^{N-1}, ..., \beta^2\right)$, avec $\beta^k : [0,1] \times \mathbb{R}_+^{N-k} \to \mathbb{R}_+$ où $\beta^k\left(x, p_{k+1}, ..., p_N\right)$ donne le prix auquel enchérisseur i sortira, s'il reste k enchérisseurs actifs, son signal est x et les prix auxquels les autres joueurs sont sortis sont $p_{k+1}, ..., p_N$.

Equilibre de l'enchère ascendante ouverte au premier prix

Theorem

L'équilibre symétrique de l'enchère anglaise est donné par la stratégie $\beta = \left(\beta^N, \beta^{N-1}, ..., \beta^2\right)$ *telle que (définition récursive)*

- $\beta^N(x) = u(x, x, ..., x)$
- $\beta^k(x, p_{k+1}, ..., p_N) = u(x, ..., x, x_{k+1}, ..., x_N)$ *où* $\beta^{k+1}(x_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_N) = p_{k+1}$

Equilibre de l'enchère ascendante ouverte au premier prix

Explication de la stratégie d'équilibre :

- Rappelons que $v_i(\mathbf{X}) = u(X_i, \mathbf{X}_{-i})$, avec $\frac{\partial u}{\partial X_i} > 0$
- Supposons que N soit le premier à sortir, et notons x_N l'unique signal tel que $\beta^N(x_N) = p_N$ (comme $\beta^N(\cdot)$ est croissante et continue x_N existe et est unique)
- Les $N-1$ autres joueurs toujours actifs suivent désormais la stratégie : $\beta^{N-1}(x, p_N) = u(x, ...x, x_N)$, avec $\beta^N(x_N) = p_N$ ($\beta^{N-1}(\cdot, p_N)$ est croissante et continue x_{N-1} existe et est unique).

Equilibre de l'enchère ascendante ouverte au premier prix

Preuve (sketch of) :

- Supposons que les autres agents suivent β^{eng}.
- Le joueur i fait le raisonnement suivant à l'équilibre : lorsque le prix est p, que $N-k$ agents sont sortis, i gagnerait l'enchère à ce prix si les $k-1$ restant (s'excluant lui-même) sortaient en p. Si c'était le cas, l'agent serait amené à considérer que leurs signaux seraient un y tel que $\beta^k(y, p_{k+1}, ..., p_N) = p$ et la valeur de l'objet pour lui deviendrait alors : $u(x, y, ..., y, x_{k+1}, ..., x_N) = p$.
- Dans ce cas, il serait rationnel de continuer à enchérir ssi cette valeur serait supérieure au prix courant p. Cela sera égal lorsque $y = x$, cad lorsque : $u(x, x, ..., x, x_{k+1}, ..., x_N) = p$

Equilibre de l'enchère au premier prix

- Enchère sous plis scellé au premier prix
- $G(\cdot\,|x)$ est la distribution conditionnelle de Y_i sachant $X_i = x$, et $g(\cdot\,|x)$ la fonction de densité associée.
- Le profit espéré du joueur i dont le signal privé est x et qui enchérit $\beta(z)$ est donné par :

$$\begin{aligned}\pi(z,x) &= \int_0^z (v(x,y) - \beta(z))\, g(y\,|x)\, dy \\ &= \int_0^z v(x,y) g(y\,|x)\, dy - \beta(z) G(z\,|x)\end{aligned}$$

- Le programme $\max_z \pi(z,x)$ a pour FOC :

$$v(x,z)g(z\,|x) - \beta'(z)G(z\,|x) - \beta(z)g(z\,|x) = 0$$

- A l'équilibre symétrique, la stratégie optimale est $\beta(x)$ lorsque le signal privé est x, et donc :

$$\beta'(x) = (v(x,x) - \beta(x))\,\frac{g(x\,|x)}{G(x\,|x)}$$

Equilibre de l'enchère au premier prix

Theorem

Le stratégie d'équilibre symétrique d'une enchère au premier prix à valeurs interdépendantes est :

$$\beta^{epp}(x) = \int_0^x v(y, y, dL(y\,|x\,)$$

$$où \,:\, L(y\,|x\,) = \exp\left\{-\int_y^x \frac{g\,(t\,|t\,)}{G\,(t\,|t\,)}dt\right\}$$

Equilibre de l'enchère au premier prix

Preuve :

- $\frac{\partial\pi(z,x)}{\partial z} = v(x,z)g(z|x) - \beta'(z)G(z|x) - \beta(z)g(z|x) = G(z|x)\left((v(x,z)-\beta(z))\frac{g(z|x)}{G(z|x)} - \beta'(z)\right)$
- Si $z < x$, alors $v(x,z) > v(z,z)$ et $\frac{g(z|x)}{G(z|x)} > \frac{g(z|z)}{G(z|z)}$ (car affiliation) et donc :

$$\frac{\partial\pi(z,x)}{\partial z} > G(z|x)\left((v(z,z)-\beta(z))\frac{g(z|z)}{G(z|z)} - \beta'(z)\right) = 0$$

- Si $z > x$, alors $v(x,z) > v(z,z)$ et $\frac{g(z|x)}{G(z|x)} < \frac{g(z|z)}{G(z|z)}$ (car affiliation) et donc :

$$\frac{\partial\pi(z,x)}{\partial z} < G(z|x)\left((v(z,z)-\beta(z))\frac{g(z|z)}{G(z|z)} - \beta'(z)\right) = 0$$

- Donc $\pi(z,x)$ est bien maximum pour $z = x$.

Comparaison des revenus dans les trois formats

Theorem

Le revenu espéré du vendeur dans une enchère anglaise est au moins aussi grand que le revenu espéré dans une enchère au second prix

Theorem

Le revenu espéré du vendeur dans une enchère au second prix est au moins aussi grand que le revenu espéré dans une enchère au premier prix

Enchères de positions

Supposons que

- le vendeur ait plusieurs objets à vendre.
- Que les acheteurs ne puissent acheter qu'une unité.
- Que les acheteurs s'accordent sur un ordre de préférence entre les objets.

$\rightarrow$ on pense naturellement à une enchère de position ($\sim$ sponsored search links in Google)

Enchères de positions

- Soient N agents.
- Soient K positions $(K < N)$ telles que $1 \succ 2 \succ ... \succ K$
- Supposons que chaque position k ait une valeur propre α_k avec $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_K > 0$
- La valeur d'être dans la position k pour le joueur i est $\alpha_k x_i$ avec x_i le signal de i.
- Supposons x_i iid sur $[0, \omega]$.

Enchères de positions

- Renommons les joueurs de telle sorte que leurs enchères b_i soient telles que que $b_1 > b_2 > ... > b_K$
- Dans ce cas la position k est allouée au joueur proposant b_k
- Il paye b_{k+1}
- Ce processus d'enchère est appelé Generalized Second Price (GSP)
- Une déclinaison en enchère anglaise

Enchères de positions

Theorem

L'enchère anglaise généralisée a un équilibre symétrique ex post dans lequel les allocations et les paiements sont identiques au mécanisme VCG.