Design de mécanismes

Nicolas Carayol

5 juin 2012

Le design de mécanismes

- Les enchères sont une classe des mécanismes possibles par lesquels un agent peut vendre un objet à plusieurs acheteurs potentiels à valeurs privées.
- Quel est le meilleur mécanisme ?

Le design de mécanismes

- Posons :
  - des acheteurs neutres au risque, $i \in \aleph = \{1, ...N\}$.
  - dont les valeurs $X_i, \forall i \in \aleph$ indépendantes distribuées selon F_i (*) à support $\chi_i = [0, \omega_i]$.
  - la valeur du bien pour le vendeur est nulle.
- Un mécanisme de vente est ici défini par $(\mathbf{B}, \mathbf{p}, \mu) = (B_i, p_i, \mu_i)_{i \in \aleph}$:
  - B_i est l'ensemble des messages possibles de i.
  - $\mathbf{p} : \mathbf{B} \to \mathbf{\Delta}(\aleph)$ avec $p_i(\mathbf{b})$ la probabilité que i obtienne le bien.
  - $\mu : \mathbf{B} \to \mathbb{R}^N$ avec $\mu_i(\mathbf{b})$ le paiement espéré de i.

Le design de mécanismes

- Si enchère au second prix et enchère au premier prix (t le type d'enchère, avec $t \in \{epp, esp\}$:
  - $p_i^t(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1 \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases}$
- $\mu_i^t(\mathbf{b})$ diffère dans les deux enchères :
  - $\mu_i^{esp}(\mathbf{b}) = \begin{cases} \max_{j \neq i} b_j & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases}$
  - $\mu_i^{epp}(\mathbf{b}) = \begin{cases} b_i & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases}$

Le design de mécanismes

- Un équilibre du mécanisme est donné par $\{\beta_i : \chi_i \to B_i\}_{i\in\aleph}$ tel que :

$$\beta_i\left(x_i\right) \in \arg\max_{b\in B_i} E_{\mathbf{x}_{-i}}\left(p_i\left(b, \beta_{-i}\left(\chi_{-i}\right)\right)x_i - \mu_i\left(b, \beta_{-i}\left(\chi_{-i}\right)\right)\right).$$

Le design de mécanismes

- Une classe plus petite de mécanismes regroupe les mécanismes simples pour lesquels : $B_i = \chi_i$.
- Un mécanisme direct est décrit par $(\mathbf{Q}, \mathbf{M}) = (Q_i, M_i)_{i \in \aleph}$, avec :
  - $\mathbf{Q} : \chi \to \mathbf{\Delta}(\aleph)$; avec $Q_i(\mathbf{x})$ est la probabilité de remporter le bien,
  - $\mathbf{M} : \chi \to \mathbb{R}^N$ avec $M_i(\mathbf{x})$ est le paiement espéré.

Le design de mécanismes

- Un équilibre du mécanisme direct est donné par $\{\sigma_i : \chi_i \to \chi_i\}_{i \in \aleph}$ tel que

$$\sigma_i(x_i) \in \arg\max_{z_i \in \chi_i} E_{\mathbf{x}_{-i}}\left(Q_i\left(z_i, \sigma_{-i}\left(\chi_{-i}\right)\right) x_i - M_i\left(z_i, \sigma_{-i}\left(\chi_{-i}\right)\right)\right).$$

- Dans un équilibre honnête (truthfull), les agents reportent leur valeur privée :

$$\sigma_i(x_i) = x_i, \forall i \in \aleph,$$

et leurs gains espérés à l'équilibre sont :

$$E_{\mathbf{x}_{-i}}\left(Q_i\left(x_i, \mathbf{x}_{-i}\right) x_i - M_i\left(x_i, \mathbf{x}_{-i}\right)\right).$$

Le "revelation principle"

Theorem

Pour tout mécanisme $(\mathbf{B}, \mathbf{p}, \mu)$ *et tout équilibre* $\{\beta_i : \chi_i \to B_i\}_{i \in \aleph}$ *de ce mécanisme, il existe un mécanisme direct* $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ *qui i) a un équilibre honnête* $\sigma_i(x_i) = x_i, \forall i \in \aleph$*, dans lequel ii) les agents ont la même probabilité de remporter le bien* $Q_i(\mathbf{x})$ *et le même paiement espéré* $M_i(\mathbf{x})$ *que dans le mécanisme original.*

Preuve :

- Posons $\beta(\mathbf{x})$ l'équilibre de $(\mathbf{B}, \mathbf{p}, \mu)$ et posons $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\beta(\mathbf{x}))$ et $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mu(\beta(\mathbf{x}))$
- Ainsi : le mécanisme direct ne fait qu'implémenter $\beta(\mathbf{x})$ à travers $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ pour obtenir le même résultat qu'à travers $(\mathbf{B}, \mathbf{p}, \mu)$.

Le "revelation principle"

Intuition

- Un mécanisme direct exécute le calcul de l'équilibre pour les joueurs.
- On demande aux agents de reporter leur x_i puis on fait en sorte que le résultat soit le même que s'ils avaient soumis leur $\beta_i(x_i)$.
- Ainsi, si un agent trouve profitable de ne pas reporter son x_i mais un z_i, alors, dans le mécanisme original, il aurait préféré jouer $\beta_i(z_i)$ plutôt que $\beta_i(x_i)$, ce qui n'est pas vérifié puisque β_i est bien l'équilibre.

Mécanismes directs

- Si enchère au second prix et enchère que premier prix (t le type d'enchère, avec $t \in \{epp, esp\}$:
  - $Q_i^t(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i > \max_{j \neq i} x_j \\ 0 \text{ si } x_i < \max_{j \neq i} x_j \end{cases}$
- $M_i^t(\mathbf{x})$ diffère dans les deux enchères :
  - $M_i^{epp}(\mathbf{x}) = Q_i^t(\mathbf{x}) \beta^{epp}(x_i)$
  - $M_i^{esp}(\mathbf{x}) = Q_i^t(\mathbf{x}) \beta^{esp}(\max_{j \neq i} x_j)$
- avec $\sum_{i \left| x_i = \max_{j \neq i} x_j \right.} Q_i^t(\mathbf{x}) = 1$

Mécanismes directs

- La probabilité que i obtienne le bien lorsque i reporte une valeur z_i et que les autres reportent leur vrai valeur est donnée par :

$$q_i(z_i) = \int_{\chi_{-i}} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f(\mathbf{x}_{-i}) \, d\mathbf{x}_{-i}$$

- Le paiement espéré dans la même situation est :

$$m_i(z_i) = \int_{\chi_{-i}} M_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f(\mathbf{x}_{-i}) \, d\mathbf{x}_{-i}$$

- Le gain espéré dans la même situation est donc :

$$q_i(z_i) x_i - m_i(z_i) = \int_{\chi_{-i}} (x_i Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) - M_i(z_i, \mathbf{x}_{-i})) f(\mathbf{x}_{-i}) \, d\mathbf{x}_{-i}$$

Contrainte de compatibilité des incitations

- Le mécanisme direct $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ est dit compatible avec les incitations si :

$$U_i(x_i) \equiv q_i(x_i)\, x_i - m_i(x_i) \geq q_i(z_i)\, x_i - m_i(z_i), \forall i, \forall x_i, \forall z_i$$

- On peut montrer que cette expression est équivalente à :

$$q_i' \geq 0$$
$$U_i = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)\, dt_i,$$

- Ceci implique que le paiement espéré dans un mécanisme direct respectant la contrainte d'incitation dépend seulement de la règle d'allocation $\mathbf{Q}$, à une constante additive près. $\rightarrow$ généralisation du théorème d'équivalence des revenus
- Contrainte de rationalité individuelle :

$$U_i(x_i) \geq 0 \quad (\leftrightarrow m_i(0) \leq 0 \text{ car } U_i(0) = -m_i(0))$$

Contrainte de compatibilité des incitations

- Implication (équivalence de revenus) : Si le mécanisme direct $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ est dit compatible avec les incitations, alors $\forall i, \forall x_i$:

$$m_i\left(x_i\right) = m_i\left(0\right) + q_i\left(x_i\right)x_i - \int_0^{x_i} q_i\left(t_i\right)dt_i$$

- Preuve : utiliser $U_i = U_i\left(0\right) + \int_0^{x_i} q_i\left(t_i\right)dt_i$, et $U_i\left(0\right) = -m_i\left(0\right)$

Mécanisme optimal

- Un mécanisme optimal est un mécanisme qui maximise le revenu du vendeur ER sous contraintes de compatibilité des incitations et de rationalité individuelle :

$$\max_{(\mathbf{Q},\mathbf{M}):\sim IC,IR} \sum_{i\in\aleph} E\left[m_i^{(\mathbf{Q},\mathbf{M})}(X_i)\right]$$

Mécanisme optimal

- Supposons un mécanisme donné $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$
- Le paiement espéré de i (avant de connaître son type) est :

$$E\left[m_i\left(X_i\right)\right]$$

$$= \int_0^{\omega_i} m_i\left(x_i\right) f_i(x_i) dx_i$$

or (équivalence de revenus) d'où

$$= \int_0^{\omega_i} \left(m_i\left(0\right) + q_i\left(x_i\right) x_i - \int_0^{x_i} q_i\left(t_i\right) dt_i \right) dx_i$$

$$= \int_0^{\omega_i} m_i\left(0\right) f_i(x_i) dx_i + \int_0^{\omega_i} q_i\left(x_i\right) x_i f_i(x_i) dx_i$$

$$- \int_0^{\omega_i} \int_0^{x_i} q_i\left(t_i\right) f_i(x_i) dt_i dx_i$$

Mécanisme optimal

$$
\begin{aligned}
& E\left[m_i\left(X_i\right)\right] \\
& = m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i\left(x_i\right) x_i f_i(x_i) dx_i - \int_0^{\omega_i} \int_{t_i}^{\omega_i} q_i\left(t_i\right) f_i(x_i) dx_i dt_i \\
& = m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i\left(x_i\right) x_i f_i(x_i) dx_i - \int_0^{\omega_i} q_i\left(t_i\right)\left(1 - F_i(t_i)\right) dt_i \\
& = m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i\left(x_i\right) f_i(x_i) \left[x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)}\right] dx_i \\
& = m_i(0) + \int_{\chi} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)}\right) Q_i\left(\mathbf{x}\right) f\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Mécanisme optimal

- Il s'agit de trouver le mécanisme $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ qui maximise $\sum_{i \in \aleph} E\left[m_i^{(\mathbf{Q},\mathbf{M})}(X_i)\right]$ sous les contraintes que :
  - IC : $\leftrightarrow q_i' \geq 0$
  - IR : $\leftrightarrow m_i(0) \leq 0$

Mécanisme optimal

- On pose $\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1-F_i(x_i)}{f_i(x_i)}$
- Notons que $\frac{1-F_i(x_i)}{f_i(x_i)} = \frac{1}{\lambda_i(x_i)}$ avec $\lambda_i(x_i)$ le taux de hasard de $F_i(x_i)$ (probabilité de l'événement en x_i sachant qu'il n'est pas inférieur à x_i).
- **Assumption (MR) :** Mécanisme régulier $\rightarrow \psi_i(x_i)$ est croissant.
- Sachant que $\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1}{\lambda_i(x_i)}$, un taux de hasard non décroissant est une condition suffisante de régularité.

Mécanisme optimal

- On souhaite donc maximiser :$\sum_{i\in\aleph} E\left[m_i\left(X_i\right)\right] = \sum_{i\in\aleph} m_i\left(0\right) + \int_\chi \left[\left(\sum_{i\in\aleph}\psi_i\left(x_i\right)\right) Q_i\left(\mathbf{x}\right)\right] f\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}$
- Considérons un instant uniquement une partie du problème et cherchons à maximiser $\left[\left(\sum_{i\in\aleph}\psi_i\left(x_i\right)\right) Q_i\left(\mathbf{x}\right)\right]$ et choisissant les Q_i.
- Il est clair, que l'on a intérêt à donner le maximum de chance au $\psi_i\left(x_i\right)$ le plus élevé.
- On propose :
  - $Q_i\left(\mathbf{x}\right) > 0 \leftrightarrow \psi_i\left(x_i\right) = \max_{j\in\aleph}\psi_j\left(x_j\right) \qquad (a)$
  - $M_i\left(\mathbf{x}\right) = Q_i\left(\mathbf{x}\right) x_i - \int_0^{x_i} Q_i\left(z_i, \mathbf{x}_{-i}\right) dz_i \qquad (b)$
- On remarque que :
  - $z_i < x_i \rightarrow \psi_i\left(z_i\right) < \psi_i\left(x_i\right)$ (car (MR)) $\rightarrow Q_i\left(z_i, \mathbf{x}_{-i}\right) < Q_i\left(x_i, \mathbf{x}_{-i}\right)$ (cf (a)), $\forall \mathbf{x}_{-i} \rightarrow q_i' \geq 0$ (IC)
  - $M_i\left(0, \mathbf{x}_{-i}\right) = 0, \forall \mathbf{x}_{-i}$ (cf (b)) $\rightarrow m_i(0) = 0 \rightarrow$ (IR)

Mécanisme optimal

- Si on suit cette règle optimale respectant (IC) et (IR), on obtient que la proposition suivante :

Theorem

Si le problème de design est régulier (MR), le mécanisme suivant est optimal :

- $Q_i^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \ si \ x_i > s(\mathbf{x}_{-i}) \\ 0 \ si \ x_i < s(\mathbf{x}_{-i}) \end{cases}$
- $M_i^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} s(\mathbf{x}_{-i}) \ \ si \ x_i > s(\mathbf{x}_{-i}) \\ 0 \ si \ x_i < s(\mathbf{x}_{-i}) \end{cases} = Q_i^*(\mathbf{x})\, s(\mathbf{x}_{-i})$
- *avec :* $s(\mathbf{x}_{-i}) = \inf\{z : \forall j \neq i, \psi_i(z) \geq \psi_j(z_j) \, ; \psi_i(z) \geq 0\}$

Mécanisme optimal

- Cas symmétrique :

Theorem

Si le problème de design est régulier (MR) et symétrique ($F_i = F \to \psi_i = \psi$), une enchère au second prix avec un prix de réserve (de vente) $r = \psi^{-1}(0)$ est optimale.

Mécanisme optimal

- Le mécanisme optimal n'est pas :
  - anonyme (fonction de l'ojet)
  - universel (fonction de l'identité de l'enchérisseur)

Mécanismes efficients et VCG

- Le mécanisme optimal est inefficace
- *Cf. partie du cours de Sébastien Rouillon*