Mechanism design - Illustration

Nicolas Carayol

5 juin 2012

Introduction

- La théorie du design de mécanismes s'appuie sur la théorie des jeu.
- Dans le contexte de cette théorie, le jeu (ses règles) est précisément ce que l'on cherche à définir.
- Ceci dans une optique d'optimisation : on recherche les règles du jeu optimales parmi toutes les règles possibles.
- La théorie des mécanismes est liée à la théorie des contacts. Cependant, le problème d'optimisation est ici en général plus complexe et ne concerne pas les actions cachées.

Vendre une unité de bien

- Un vendeur et un unique acheteur possible.
- L'utilité VNM de l'acheteur (neutre au risque) est :

$$u = \theta - t$$

  si achat et 0 sinon.
- $\theta > 0$ est la valorisation du bien par l'acheteur
- t est le transfert (prix) pour le bien.

Vendre une unité de bien

- L'hypothèse principale ici est que θ est une information privée de l'acheteur.
- Le vendeur a une distribution de proba subjective sur la valeur du bien pour l'acheteur donnée par F à support positif $\left[\theta, \overline{\theta}\right]$
- Une manière d'envisager la procédure de vente, si le vendeur est le designer de la procédure, serait de choisir un prix de manière définitive p.
- Sa probabilité de séduire l'unique acheteur est alors $P(\theta - p > 0) = P(\theta > p) = 1 - P(\theta \leq p) = 1 - F(p)$
- Son gain espéré est alors $(1 - F(p))\, p$.
- Cette procédure n'est pas forcément la plus appropriée pour le vendeur : il pourrait définir une autre procédure, par exemple des offres alternées.

Vendre une unité de bien

- Question du commitment sur une règle et une stratégie données.
- Nous faisons l'hypothèse que le vendeur peut parfaitement se contraindre à suivre une procédure annoncée et une stratégie dans cette procédure (full commitment power).
- L'acheteur va lui-même définir sa meilleur stratégie dans cette procédure.
- Dans ce cas : quel est le meilleur choix du vendeur ?
- Le vendeur doit prendre en considération que l'acheteur n'acceptera jamais un prix tel que son utilité serait en dessous de son utilité de réserve, ici 0. C'est la contrainte de rationalité de l'acheteur que le vendeur doit prendre en considération.

Mécanismes directs

Definition

Un mécanisme direct : consite en des fonctions $q(\theta)$ et $t(\theta)$, telles que :

$$q : \left[\underline{\theta}, \bar{\theta}\right] \rightarrow [0,1]$$
$$t : \left[\underline{\theta}, \bar{\theta}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

Interprétation :

- Dans un mécanisme direct, on demande (ici le vendeur) à l'acheteur de reporter son θ.
- Le vendeur s'engage à transférer le bien à l'acheteur avec une proba $q(\theta)$ pour un transfert de $t(\theta)$.
- Notons que le transfert est spécifié ici comme une fonction déterministe du type reporté. Cette sophistication ne changerait pas les résultats.

Mécanismes directs

- Tous les mécanismes de vente qui ne sont pas directs sont dits indirects.
- Dans le cadre d'un mécanisme direct, la stratégie de l'acheteur est une fonction $\sigma : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ de report (non forcément véridique) de son type.

Principe de révélation

Theorem

Pour tout mécanisme Γ *et pour toute stratégie optimale de l'acheteur* σ *dans* Γ, *il existe un mécanisme direct* Γ' *et une stratégie optimale* σ' *dans* Γ' *telle que :*

1. *La stratégie* σ' *satisfait* $\sigma'(\theta) = \theta$ *pour tout* $\theta \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$
2. *Pour tout* $\theta \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$, *la probabilité de vente et le prix sont identiques dans les deux mécanismes*

Principe de révélation

Preuve

- Pour tout $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ on peut définir $q(\theta)$ et $t(\theta)$ comme requis dans le point 2.
- On arrive à la preuve dès lors que la stratégie $\sigma'(\theta) = \theta$ est optimale dans Γ'.
- Notons qu'en appliquant cette stratégie dans Γ', l'acheteur obtient la même utilité espérée qu'en jouant sa stratégie optimale $\sigma(\theta)$ dans Γ.
- S'il prétendait qu'il était d'un autre type $\theta' \neq \theta$, l'acheteur obtiendrait dans le jeux Γ' donc le même gain que s'il avait joué la stratégie $\sigma(\theta')$ dans Γ'
- L'optimalité de $\sigma'(\theta) = \theta$ dans Γ' suit donc logiquement l'optimalité de $\sigma(\theta)$ dans Γ.$\square$

Principe de révélation

Implications

- Le principe de révélation permet de simplifier fortement l'analyse en permettant de restreindre l'examen des mécanismes aux mécanismes révélateurs
- C'est à dire à des paires de fonctions $q(\theta)$ et $t(\theta)$ telles que l'acheteur estime qu'il est optimal de reporter son type.
- Etant donné que le mécanisme utilisé est direct, l'utilité espérée de l'acheteur de type θ est :

$$u(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta)$$

Contraintes

Definition

Un mécanisme direct est "incentive compatible" si la révélation de son vrai type est optimal pour tout type :

$$\theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'), \forall \theta' \in \left[\underline{\theta}, \bar{\theta}\right].$$

Definition

une mécanisme direct est compatible avec la rationalité individuelle de l'acheteur (participation aprè avoir découvert son type) :

$$u(\theta) \geq 0, \forall \theta \in \left[\underline{\theta}, \bar{\theta}\right].$$

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Lemma

Si un mécanisme direct est compatible avec les incitations, si $q(\cdot)$ est croissante.

Preuve :

- Soient deux types θ et θ' tels que $\theta > \theta'$
- IC implique :

$$\begin{aligned} \theta q(\theta) - t(\theta) &\geq \theta q(\theta') - t\left(\theta'\right) \\ \theta' q(\theta') - t\left(\theta'\right) &\geq \theta' q(\theta) - t(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(\theta - \theta'\right) q(\theta) \geq \left(\theta - \theta'\right) q(\theta') \\ &\leftrightarrow q(\theta) \geq q(\theta') \square \end{aligned}$$

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Lemma

Un mécanisme direct est compatible avec les incitations si $u(\cdot)$ est croissante, convexe et donc différentiable (sauf au plus dans un nombre de point dénombrable) et dans cand ces cas $\frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta} = q(\theta)$.

Preuve : Théorème de l'enveloppe

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Lemma

Un mécanisme direct est compatible avec les incitations si $\forall\theta \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$:

$$u(\theta) = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

Preuve : immédiat $\left(u'\left(\theta\right) = q(\theta)\right)$

- Interprétation : l'utilité espérée de l'acheteur est déterminée par $u(\underline{\theta})$ et la fonction $q(\cdot)$. Ainsi, tous les mécanismes indirects qui donnent lieu (après optimisation de l'acheteur) au même $u(\underline{\theta})$ et à la même fonction $q(\cdot)$, génèrent le même paiement espéré (pour ce même type d'acheteur).

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Corollary

Si un mécanisme direct est compatible avec les incitations si $\forall\theta \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$:

$$t\left(\theta\right) = t\left(\underline{\theta}\right) + \theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta}) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

Preuve : immédiat $\left(u\left(\theta\right) = \theta q(\theta) - t\left(\theta\right)\right)$

- Interprétation : même raisonnement qu'au lemme précédent sur le revenu espéré du vendeur.
- Connecté avec le "revenue equivalence theorem" que rencontrerons à nouveau en théorie des enchères

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Theorem

Un mécanisme direct $q(\theta)$ et $t(\theta)$ est compatible avec les incitations si et seulement si :

1. *q est croissante*
2. $\forall\theta \in \left[\underline{\theta}, \bar{\theta}\right] : t(\theta) = t(\underline{\theta}) + \theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta}) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$

Preuve :

- Le "si" suit directement deux lemmes introduit précédemment.
- Le "seulement si" doit être prouvé en montrant qu'aucun type θ ne peut vouloir révéler un type $\theta' \neq \theta$ lorsque 1 et 2 sont vérifiés :

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Theorem

Un mécanisme direct $q(\theta)$ et $t(\theta)$ est compatible avec les incitations si et seulement si :

1. *q est croissante*
2. $\forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] : t(\theta) = t(\underline{\theta}) + \theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta}) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$

Preuve :

- le "si" suit directement deux lemmes introduit précédemment.
- Le "seulement si" doit être prouvé en montrant qu'aucun type θ ne peut vouloir révéler un type $\theta' \neq \theta$ lorsque 1 et 2 sont vérifiés.

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Preuve : Aucun type θ ne peut vouloir révéler un type $\theta' \neq \theta$ (incentive compatible) lorsque (1) et (2) sont vérifiés.

- "Incentive compatible" :
  $u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t\left(\theta'\right), \forall \theta' \qquad (IC)$
- Quelques calculs (utilisant (2)) :

$$\begin{aligned} (IC) &\leftrightarrow u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t\left(\theta'\right) + \theta' q(\theta') - \theta' q(\theta') \\ &\leftrightarrow u(\theta) - u(\theta') \geq \left(\theta - \theta'\right) q(\theta'), \forall \theta' \end{aligned}$$

or $u(\theta) = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$ (se déduit de (2)), d'où :

$$(IC) \leftrightarrow \int_{\theta'}^{\theta} q(x)dx \geq \int_{\theta'}^{\theta} q(\theta')dx, \forall \theta' \qquad (IC2)$$

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Preuve :

- $\int_{\theta'}^{\theta} q(x)dx \geq \int_{\theta'}^{\theta} q(\theta')dx, \forall \theta' \qquad (IC2)$
- Si $\theta \geq \theta'$:
  - notons que les bornes des intégrales dans $(IC2)$ sont les mêmes à droite et à gauche de l'inégalité,
  - que $q(x) \geq q(\theta')$ pour tout $x \in [\theta', \theta]$ puisque $q(\cdot)$ est croissante selon (1),
  - L'inégalité est donc bien toujours vérifiée dans ce cas.
- Si $\theta < \theta'$: (similaire)
- Ainsi, dans tous les cas, (1) et (2) $\rightarrow (IC)$ $\square$

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Lemma

Un mécanisme direct est compatible avec les incitations est individuellement rationnel si et seulement si

$$u(\underline{\theta}) \geq 0 \qquad (\leftrightarrow t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} q(\underline{\theta}))$$

Preuve : Immédiat

Mécanisme optimal

- Mécanisme optimal : celui qui maximise le revenu espéré du vendeur, ici $Et(\theta)$.

Lemma

Dans un mécanisme direct, compatible avec les incitations, respectant la rationalité de l'acheteur et qui maximise le revenu espéré du vendeur, on a : $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta})$.

Preuve : Immédiat

- Interprétation : le vendeur va proposer au type le plus bas un transfert égal à son utilité brute espérée, lui offrant dont une utilité espérée nulle.

Contraintes : conséquences pour les mécanismes directs

Corollary

Dans un mécanisme direct, compatible avec les incitations, respectant la rationalité de l'acheteur et qui maximise le revenu espéré du vendeur, on a :

$$t(\theta) = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx.$$

Preuve : Immédiat

- Interprétation : le transfert proposé est égal à l'utilité espérée de tout agent moins une "rente informationnelle" qui garanti que l'acheteur révèle bien son type.

Mécanismes direct optimaux (sous contraintes)

Theorem

Un mécanisme direct, est compatible avec les incitations, respecte la rationalité de l'acheteur et maximise le revenu espéré du vendeur, si et seulement si :

$$\exists p^* \in \arg\max_p \left(1 - F(p)\right) p;$$

$$q(\theta) = \begin{cases} 1 \ si \ \theta \geq p^* \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

$$t(\theta) = \begin{cases} p^* \ si \ \theta \geq p^* \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

Preuve : non vu