Chapitre 5. Les enchères

Nicolas Carayol
M1 MIMSE

22 avril 2013

Les différentes enchères

- Enchère anglaise : ascendante au premier prix
- Enchère hollandaise : descendante au premier prix
- Enchère au premier prix sous pli cacheté
- Enchère au second prix sous pli cacheté
- Autres (exemple : “all pay auctions”)

Critéres de jugement

- Maximisation du revenu (pour le vendeur).
- Maximisation du bien être $\rightarrow$ que le bien soit acheté par l'agent qui le valorise le plus *ex post*.

Valorisation

- Valeur privée :
  - chaque enchérisseur connaît sa valorisation au début du jeu,
  - chaque enchérisseur ignore celle des autres lorsqu'il enchérit.
- Valeur interdépendante :
  - la valeur du bien est inconnue des enchérisseurs au début,
  - ils ont des signaux privés corrélés à la vrai valeur et une estimation privée,
  - cas particulier : enchère à valeur commune pure.

Equivalences

- Enchère hollandaise et enchère au premier prix sous pli cacheté sont stratégiquement équivalentes.
- Si les valeurs sont privées : Enchère anglaise et l'enchère au second prix sous pli cacheté sont équivalentes (au sens faible) $\rightarrow$ à voir plus tard.

Enchères au second prix

- Soient N joueurs neutres au risque.
- Il ont une valeur privée pour le bien $X_1, X_2, ..., X_N$ iid $\sim F$ sur $[0, \omega]$.
- Le gain (ex post) est donné par :

$$\pi_i(\mathbf{b} \,|x_i) = \begin{cases} x_i - \max_{j \neq i} b_j \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases} .$$

- Si $b_i = \max_{j \neq i} b_j$: allocation aléatoire équiprobable entre les meilleurs enchérisseurs.
- Une stratégie du jeu est une fonction de sa valeur privée x_i : $\beta_i : [0, \omega] \to \mathbb{R}^+$.

Enchères au second prix

Theorem

Dans une enchère au second prix sous pli cacheté, les enchérisseurs ont pour statégie (faiblement) dominante :

$$\beta(x) = x.$$

- A l'équilibre symétrique, chaque agent enchérit sa valeur privée.
- L'agent qui a la valorisation privée la plus élevée emporte l'enchère.

Enchères au second prix

Preuve :

- Notons : $p_i = \max_{j \neq i} b_j$ et $b_i \to \pi_i(b_i, p_i | x_i)$.
- Si $x_i > b_i$:
  - si $x_i > b_i \geq p_i$: $\pi_i(b_i, p_i | x_i) = x_i - p_i$ (idem),
  - si $p_i > x_i > b_i$: $\pi_i(b_i, p_i | x_i) = 0$ (idem),
  - si $x_i > p_i > b_i$: $\pi_i(b_i, p_i | x_i) = 0$ alors que $\pi_i(x_i, p_i | x_i) = x_i - p_i > 0$.
- Si $x_i < b_i$:
  - si $x_i < b_i \leq p_i$: $\pi_i(b_i, p_i | x_i) = 0$ (idem),
  - si $p_i < x_i < b_i$: $\pi_i(b_i, p_i | x_i) = x_i - p_i$ (idem),
  - si $x_i < p_i < b_i$: $\pi_i(b_i, p_i | x_i) = x_i - p_i < 0$ alors que $\pi_i(x_i, p_i | x_i) = 0$.

Enchères au second prix

Remarques :

- Le théorème tient même si les X_i ne sont pas identiquement distribués ni indépendants.
- Il est nécessaire que les valeurs soient privées.

Enchères au second prix

- Le revenu espéré d'un joueur i à l'équilibre est donc :

$$m(x_i) = \Pr\left(x_i \geq \max_{j \neq i} X_j\right) \times E\left(\max_{j \neq i} X_j \middle| x_i \geq \max_{j \neq i} X_j\right).$$

- Soit la VA $Y_i \equiv \max_{j \neq i} X_j$ et sa cdf $G(y) \equiv \Pr(Y_i \leq y) = \Pi_{j \neq i} \Pr(X_j \leq y) = F(y)^{N-1}$ (car X_i iid) avec la df $g = G'$.
- Si utilise cela, on peut faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned} m(x_i) &= \Pr(x_i \geq Y_i) \times E(Y_i | x_i \geq Y_i) \\ &= G(x_i) \times E(Y_i | x_i \geq Y_i) \\ &= G(x_i) \times \frac{1}{G(x_i)} \int_0^{x_i} y g(y) dy \\ &= \int_0^{x_i} y g(y) dy. \end{aligned}$$

Enchères au premier prix

- Soit N joueurs neutres au risque.
- Il ont une valeur privée pour le bien $X_1, X_2, ..., X_N$ *iid* de fonction de répartition F sur le support $[0, \omega]$.
- Le gain (ex post) est donné par :

$$\pi_i\left(\mathbf{b}\,|x_i\right) = \begin{cases} x_i - b_i \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 \qquad\quad \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases} .$$

- Si $b_i = \max_{j \neq i} b_j$ allocation aléatoire équiprobable.

Enchères au premier prix

- Une stratégie du jeu est une fonction de sa valeur privée x_i : $\beta_i : [0, \omega] \to \mathbb{R}$
- Supposons que les joueurs adoptent une stratégie symétrique $\beta(x)$ croissante (et différentiable).
- Notons que :
  - $b > \beta(\omega)$ est impossible à l'équilibre car il pourrait réduire son offre tout en gagnant l'enchère. On se restreint donc à $b \leq \beta(\omega)$.
  - Un joueur de valeur privée nulle ne va enchérir rationnellement une valeur strictement positive car il ferait alors une perte certaine. Donc : $\beta(0) = 0$.

Enchères au premier prix

- Le joueur i gagne s'il soumet l'enchère maximale : cad si $b > \max_{j \neq i} \beta(X_j) = \beta(\max_{j \neq i} X_j) = \beta(Y_i)$ (car β est croissante)
- C'est-à-dire si : $\beta^{-1}(b) > Y_i$
- Son revenu espéré lorsque x est sa valeur privée est donc :

$$\begin{aligned} m &= (x-b) \times \Pr\left(Y_i \leq \beta^{-1}(b)\right) \\ &= (x-b) \times G\left(\beta^{-1}(b)\right) \end{aligned}$$

- L'enchère b optimale maximise son revenu, et sa condition de premier ordre est :

$$\frac{g\left(\beta^{-1}(b)\right)}{\beta'\left(\beta^{-1}(b)\right)}(x-b) - G\left(\beta^{-1}(b)\right) = 0$$

Enchères au premier prix

- A l'équilibre symétrique $b = \beta(x)$ $(x = \beta^{-1}(b))$, et sachant que $\beta(0) = 0$, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
xg(x) &= \beta'(x)\,G(x) + bg(x) \\
&\leftrightarrow xg(x) = \frac{d\left(\beta(x)\,G(x)\right)}{dx} \\
&\leftrightarrow \int_0^x yg(y) = \beta(x)\,G(x) \\
&\leftrightarrow \beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x yg(y)\,dy \\
&\leftrightarrow \beta(x) = E\left(Y_i \,|x_i \geq Y_i\right)
\end{aligned}
$$

Enchères au premier prix

Theorem

Dans une enchère au premier prix sous pli cacheté, les enchérisseurs $i = 1, ..., N$ ont pour statégie d'équilibre symmétrique :

$$\beta\left(x_i\right) = E\left(Y_i \left| x_i > Y_i\right.\right),$$

avec $Y_i \equiv \max_{j \neq i} X_j$ *iid.*

- A l'équilibre symétrique, chaque agent enchérit son espérance de gain.
- L'agent qui a la valorisation privée la plus élevée emporte l'enchère.
- Nous n'avons pas montré que c'est une condition suffisante, il reste à démontrer que si les autres agents suivent $\beta\left(\cdot\right)$, il est optimal individuellement de suivre $\beta\left(\cdot\right)$.

Enchères au premier prix

Preuve :

- Supposons que les autres agents suivent $\beta(\cdot)$ noté β_{-i}.
- Notons $z = \beta^{-1}(b)$, la valeur privée pour laquelle, en application de la stratégie d'équilibre β, son enchère associée b serait optimale ($b = \beta(z)$) : il dévie en se comportant comme si sa valeur était $z \neq x$ et qu'il suivait la stratégie d'équilibre).
- Alors, le gain espéré de l'agent i dont la valeur privée est x s'il enchérit $\beta(z)$ est :

$$\begin{aligned}
E\pi_i\left(\beta(z), \beta_{-i} \,|x\right) &= G(z)\left(x - \beta(z)\right) \\
&= G(z)\,x - G(z)\,\beta(z) \\
&= G(z)\,x - \int_0^z y g(y)\,dy \\
&= G(z)\,x - G(z)\,z + \int_0^z G(y)\,dy \\
&= G(z)(x - z) + \int_0^z G(y)\,dy
\end{aligned}$$

Enchères au premier prix

Preuve :

- La différence entre enchérir selon sa stratégie d'équilibre $\beta(x)$ et enchérir $\beta(z)$ est alors donnée par :

$$E\pi_i\left(\beta(x), \beta_{-i} \mid x\right) - E\pi_i\left(\beta(z), \beta_{-i} \mid x\right)$$
$$= G(x)(x-x) + \int_0^x G(y)\,dy - G(z)(x-z) - \int_0^z G(y)\,dy$$
$$= G(z)(z-x) - \int_x^z G(y)\,dy$$

- Nous pouvons observer que :

$$G(z)(z-x) - \int_x^z G(y)\,dy \geq 0 \text{ (si } z \geq x \text{ et si } x \geq x\text{)}$$

Enchères au premier prix

Preuve :

- Si l'on enchérit $\beta(z) \geq \beta(x) \rightarrow$ on ne peut espérer un gain supérieur
- Si l'on enchérit $\beta(z) \leq \beta(x) \rightarrow$ on ne peut espérer un gain supérieur
- $\beta(x)$ est donc bien un équilibre $\square$

Enchères au premier prix

Notons que :

$$\begin{aligned}
\beta(x_i) &= E(Y_i \mid x_i \geq Y_i) \\
&= \frac{1}{G(x_i)} \int_0^{x_i} y g(y)\, dy \\
&= \frac{1}{G(x_i)} \left[x_i G(x_i) - \int_0^{x_i} G(y)\, dy \right] \\
&= x_i - \int_0^{x_i} \frac{G(y)}{G(x_i)} dy \\
&= x_i - \int_0^{x_i} \left[\frac{F(y)}{F(x_i)} \right]^{N-1} dy \\
&\leq x_i
\end{aligned}$$

- Les joueurs enchérissent donc en dessous de leur valeur privée.
- Ils enchérissent d'autant moins que le nombre d'enchérisseurs (N) est élevé.

Enchères au premier prix

Exemples :

- Si $X_i \sim U\left[0,1\right]$:
  - $\beta\left(x\right) = \frac{N-1}{N}x$
- Si $X_i \sim Exp\left(\lambda\right) \rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et $N = 2$:
  - $\beta\left(x\right) = \frac{1}{\lambda}\frac{xe^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}$

Comparaison de revenus

- Les joueurs enchérissent donc en dessous de leur valeur privée. Son revenu espéré lorsque x est sa valeur privée est donc :

$$\begin{aligned} m(x_i) &= G\left(\beta^{-1}(b_i)\right) E\left(Y_i \,|x_i \geq Y_i\right) \\ &= G(x_i) E\left(Y_i \,|x_i \geq Y_i\right) \\ &= \int_0^{x_i} y g(y) dy, \\ &= \text{ revenu espéré en enchère au second prix.} \end{aligned}$$

Comparaison de revenus

- Notons t le type d'enchère, avec $t \in \{epp, esp\}$.
- Le revenu espéré d'un joueur avant de connaître sa valeur privée dans l'enchère t est

$$\begin{aligned}
Em^t(X) &= \int_0^\omega m^t(x) f(x)dx, \\
&= \int_0^\omega \left(\int_0^x yg(y)dy\right) f(x)dx, \\
&= \int_0^\omega \left(\int_y^\omega f(x)dx\right) yg(y)dy, \\
&= \int_0^\omega (1 - F(y))\, yg(y)dy.
\end{aligned}$$

Comparaison de revenus

- Le revenu espéré du vendeur est :

$$
\begin{aligned}
ER^t &= N \times Em^t(X) = \ldots \\
&= EY_2^N \\
&= \text{valeur espérée de la seconde meilleure enchère}
\end{aligned}
$$

Theorem

Si les agents ont des valeurs privées indépendantes et sont neutres au risque, le revenu espéré du vendeur dans une enchère au premier prix ou dans une enchère au second prix (sous plis cachetés) est le même.

Comparaison de revenus

Theorem

Si les agents ont des valeurs privées indépendantes et sont neutres au risque, la distribution des prix d'équilibre dans une enchère au second prix est un étalement préservant la moyenne (mean preserving spread) d'une enchère au premier prix (sous plis cachetés).

Corollary

Si les agents ont des valeurs privées indépendantes et sont neutres au risque, tout vendeur averse au risque préfèrera une enchère au premier prix à une enchère au second prix (sous plis cachetés).

Le principe de l'équivalence des revenus

Definition

Une enchère est standard si le plus grand enchérisseur se voit attribuer le bien (ex troisièmes prix, all-pay...)

Theorem

Si les agents ont des valeurs privées indépendantes et sont neutres au risque, tout équilibre symétrique et croissant dans toute enchère standard, tel que le paiement espéré d'un joueur à valeur nulle est nul, rapporte le même revenu espéré au vendeur.

Le principe de l'équivalence des revenus

Preuve.

- Soit un mode d'enchère t et $\beta(\cdot)$ une stratégie d'équilibre symétrique de t.
- Notons $m^t(x_i)$ le revenu espéré de l'agent de valeur x_i à l'équilibre, et supposons que $m^t(0) = 0$
- Considérons un joueur i de valeur x_i, supposons les autres suivent $\beta(\cdot)$, et calculons son revenu espéré lorsque il enchérit $\beta(z)$:

$$E\pi_i\left(\beta(z), \beta_{-i} \left| x_i\right.\right) = G(z)\, x_i - m^t(z)$$

- Si on maximise ce revenu espéré sur z, on obtient :

$$\frac{d\left(G(z)\, x_i - m^t(z)\right)}{dz} = g(z)\, x_i - \frac{d\left(m^t(z)\right)}{dz} = 0$$

Le principe de l'équivalence des revenus

Preuve.

- Il est optimal pour l'agent de fixer $z = x_i$ et donc, pour tout y :

$$yg(y) = \frac{d(m^t(y))}{dy}$$

- Donc :

$$\begin{aligned} m^t(x_i) &= m^t(0) + \int_0^{x_i} yg(y)\,dy \\ &= \int_0^{x_i} yg(y)\,dy \\ &= G(x_i)\,E(Y_i \mid x_i \geq Y_i) \end{aligned}$$

- Ce qui est indépendant du type d'enchère t. $\square$

Le principe de l'équivalence des revenus

Conditions d'application du principe d'équivalence du revenu :

- Indépendance
- Neutralité au risque des enchérisseurs
- Absence de contrainte budgétaire
- Symétrie

Enchères de positions

Supposons que

- le vendeur ait plusieurs objets à vendre.
- Que les acheteurs ne puissent acheter qu'une unité.
- Que les acheteurs s'accordent sur un ordre de préférence entre les objets.

$\rightarrow$ on pense naturellement à une enchère de position ($\sim$ sponsored search links in Google)

Enchères de positions

- Soient N agents.
- Soient K positions $(K < N)$ telles que $1 \succ 2 \succ ... \succ K$
- Supposons que chaque position k ait une valeur propre α_k avec $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_K > 0$
- La valeur d'être dans la position k pour le joueur i est $\alpha_k x_i$ avec x_i le signal de i.
- Supposons x_i iid sur $[0, \omega]$.

Enchères de positions

- Renommons les joueurs de telle sorte que leurs enchères b_i soient telles que que $b_1 > b_2 > ... > b_K$
- Dans ce cas la position k est allouée au joueur proposant b_k
- Il paye b_{k+1}
- Ce processus d'enchère est appelé Generalized Second Price (GSP)
- Une déclinaison en enchère anglaise

Enchères de positions

Theorem

L'enchère anglaise généralisée a un équilibre symétrique ex post dans lequel les allocations et les paiements sont identiques au mécanisme VCG.