M1 MIMSE - Spécialité 4
Université Bordeaux 1 - Université Bordeaux 2 - Université Bordeaux IV
Enseignant: Nicolas Carayol

Théorie des Jeux

TP 1

Exercice 1.

Deux étudiants, Arthur (a) et Béatrice (b) doivent se répartir 100 euros trouvés à la sortie de l'amphi. Pour cela, ils ne peuvent faire que trois annonces (simultanées) exprimant leurs revendications sur la somme découverte: 0, 50 ou 100. Si leurs annonces sont compatibles (la somme des annonces est inférieure ou égale à 100), chacun obtient le montant qu'il ou elle a annoncé. Si leurs annonces sont incompatibles (la somme des annonces est strictement supérieure à 100), ils se disputent nécessairement et leur incivilité est découverte. La mauvaise réputation qu'ils doivent endurer dans ce cas est représentée par un gain négatif de -200 pour chacun.

a. Décrire l'ensemble des joueurs et leurs stratégies possibles et représenter le jeu sous forme normale.

b. Les joueurs ont-ils une stratégie dominante?

c. Trouver le ou les équilibre(s) de Nash.

Voir les exercices réalisés en cours

Exercice 2.

Soient un tireur de pénalty et un gardien de but. Au moment de jouer le pénalty, aucun joueur ne peut observer la stratégie de l'autre. Une stratégie consiste dans le fait de choisir un des deux côtés du but (à gauche ou à droite du but, lorsqu'on le regarde du centre du terrain). Un but marqué/non marqué vaut un gain unitaire pour le tireur/gardien. Sinon le gain est nul. Si le gardien choisit le même côté que le tireur il empêche le but. Le ballon passe à côté de la cage lorsqu'il est tiré à droite avec une probabilité $1 - \pi_d$ et est raté lorsqu'il est tiré à gauche avec une probabilité $1 - \pi_g$.

a. Représenter le jeu sous forme normale et trouver le ou les équilibre(s) de Nash en stratégies pures.

b. Trouver le ou les équilibre(s) de Nash en stratégies mixtes.

c. Il est bien connu de tous les footballeurs qu'un tireur droitier rate plus souvent le cadre s'il décide de tirer à gauche. Supposant en outre que le pied préféré de tous les tireurs est aussi connu des gardiens, un droitier tirera-t-il plus souvent à gauche ou à droite? Face à un droitier, un goal plonge-t-il plus souvent à droite ou à gauche?

Correction

Soient un tireur de penalty et un gardien de but. Au moment de jouer le pénalty, chaque joueur ne peut observer la stratégie de l'autre. Une stratégie consiste dans le fait de choisir un des deux côtés du but (à gauche ou à droite du but). Un but marqué/non marqué vaut un gain unitaire pour le tireur/gardien. Sinon le gain est nul. Si le gardien choisit le même côté que le tireur il empêche le but. Le ballon passe à côté de la cage lorsqu'il est tiré à droite avec une probabilité $1 - \pi_d$ et est raté lorsqu'il est tiré à gauche avec une probabilité $1 - \pi_g$.

a. Représenter le jeu sous forme normale et trouver le ou les équilibre(s) de Nash en stratégies pures.

		G	
		g	d
T	g	0,1	π_g,$1 - \pi_g$
	d	π_d,$1 - \pi_d$	0,1

pas d'EN en stratégie pure

b. Trouver le ou les équilibre(s) de Nash en stratégie mixte.

quand G joue g avec proba p et d avec proba $1 - p$

gain de T sont $U_T(g,p) = 0p + \pi_g(1-p) = \pi_g(1-p)$ si T joue g et

gain de T sont $U_T(d,p) = \pi_d p + 0(1-p) = \pi_d p$ si T joue d.

Donc T joue g si $\pi_g(1-p) > \pi_d p \to \pi_g > p(\pi_d + \pi_g) \to p < \frac{\pi_g}{(\pi_d+\pi_g)}$

$$R_1(p) = q^*(p) = \begin{cases} 1 & \text{Si } p < \frac{\pi_g}{(\pi_d+\pi_g)} \\ [0,1] & \text{Si } p = \frac{\pi_g}{(\pi_d+\pi_g)} \\ 0 & \text{Si } p > \frac{\pi_g}{(\pi_d+\pi_g)} \end{cases}$$

T joue g avec proba q et d avec proba $1-q$

gain de G sont $U_G(q,g) = q + (1-\pi_d)(1-q) = 1 - \pi_d + \pi_d q$ si G joue g et

gain de G sont $U_G(q,d) = (1-\pi_g)q + (1-q)$ si G joue d.

Donc G joue g si $1 - \pi_d + \pi_d q > (1-\pi_g)q + (1-q) \to (\pi_d + \pi_g)q > \pi_d \to q > \frac{\pi_d}{(\pi_g+\pi_d)}$

$$R_1(p) = q^*(p) = \begin{cases} 1 & \text{Si } q > \frac{\pi_d}{(\pi_g+\pi_d)} \\ [0,1] & \text{Si } q = \frac{\pi_d}{(\pi_g+\pi_d)} \\ 0 & \text{Si } q < \frac{\pi_d}{(\pi_g+\pi_d)} \end{cases}$$

Représentation graphique traditionnelle sauf que ces courbes ne doivent se couper qu'une fois

Exercice 3.

Deux conducteurs (A et B) dirigent leur voiture l'une contre l'autre dans une rue trop étroite pour qu'elles puissent se croiser sans provoquer d'accident. Si un conducteur ralentit tandis que l'autre garde la même vitesse, il perd la face : il obtient alors une utilité de 0 et son adversaire obtient 4. Si les deux ralentissent en même temps alors le jeu se termine en égalité et les deux obtiennent une utilité de 2. Si aucun ne ralentit alors l'accident arrive et chacun obtient une utilité de -2.

a. Donnez la forme normale du jeu.

b. Déterminez les équilibres de Nash en stratégies pures.

c. Déterminez les équilibres de Nash en stratégies mixtes.

voir les exercices réalisés en cours

Exercice 4.

Deux joueurs inter-agissent en disposant chacun de deux stratégies. Les paiements varient en fonction de leurs décisions simultanées et de l'état du monde. Deux états du monde ω_1 et ω_2 sont possibles et sont équiprobables: $\Pr(\omega_1) = \Pr(\omega_2)$. Ce jeu bayésien est décrit par:

si ω_1		joueur 2	
		g	d
joueur 1	h	$(1,1)$	$(0,0)$
	b	$(0,0)$	$(0,0)$

si ω_2		joueur 2	
		g	d
joueur 1	h	$(0,0)$	$(0,0)$
	b	$(0,0)$	$(2,2)$

a. Déterminez les équilibres de Nash bayésiens lorsque l'agent 2 ignore l'état du monde et que 1 le connaît.

b. Déterminez les équilibres de Nash bayésiens (en stratégies mixtes) lorsque les deux agents ignorent l'état du monde.

a. Déterminez les équilibres de Nash bayésiens lorsque l'agent 2 ignore l'état du monde et que 1 le connaît.

Dans ce qui suit on considère que les stratégies mixtes sont autorisées.

Notations: $p\left(a_1 = h|\,\omega_1\right) =$ proba que 1 joue a_1 lorsque l'état du monde est ω_1.

Le gain espéré de de 2 s'il joue g est :

$\mathrm{E}u^2\left(a_2 = g\right) = p\left(\omega_1\right)\times\left[p\left(a_1 = h|\,\omega_1\right) u_2^{\omega_1}\left(h, g\right) + p\left(a_1 = b|\,\omega_1\right) u_2^{\omega_1}\left(b, g\right)\right]$
$+p\left(\omega_2\right)\left[p\left(a_1 = h|\,\omega_1\right) u_2^{\omega_2}\left(h, g\right) + p\left(a_1 = b|\,\omega_2\right) u_2^{\omega_2}\left(b, g\right)\right]$

or ici:

$p\left(a_1 = b|\,\omega_1\right) = p\left(a_1 = h|\,\omega_2\right) = p\left(\omega_1|\,a_1 = b\right) = p\left(\omega_2|\,a_1 = h\right) = 0$ car le joueur 1 a une stratégie dominante dans chaque état du monde: h si ω_1 et b si ω_2. Donc s'il connait l'état du monde, il va donc jouer sa stratégie dominante dans cet état. Le joueur 2 a des stratégies séparatrices. En conséquence:

$p(\omega_1) \times p(a_1 = h|\,\omega_1) = 1/2 \times 1$ et
$p(\omega_2) \times p(a_1 = b|\,\omega_2) = 1/2 \times 1$
(Remarque $p(a_1 = h)\, p(\omega_1|\, a_1 = h) = p(\omega_1) \times p(a_1 = h|\,\omega_1)$ par la Regle de Bayes: $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$)

Ainsi: le gain espéré de de 2 s'il joue g est :
$\mathrm{E}u^2(a_2 = g) = \frac{1}{2}u_2^{\omega_1}(h, g) + \frac{1}{2}u_2^{\omega_2}(b, g) = \frac{1}{2}$

De même nous pouvons calculer le gain espéré de 2 s'il joue d est : $\mathrm{E}u^2(a_2 = d) = \frac{1}{2}u_2^{\omega_1}(h, d) + \frac{1}{2}u_2^{\omega_2}(b, d) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2 = 1$

Ainsi l'agent non informé jouera toujours d car $\mathrm{E}u^2(a_2 = d) > \mathrm{E}u^2(a_2 = g)$.

Donc l'EN Bayésien est: $(s_1 = (a_1 = h|\,\omega_1, a_1 = b|\,\omega_2)\,; s_2 = d)\,.$

b. Déterminez les équilibres de Nash bayésiens (en stratégies mixtes) lorsque les deux agents ignorent l'état du monde.

Les agents n'ont plus de stratégies séparatrices (ils ignorent tous l'état du monde)

Le gain espéré de 2 s'il joue g est :
$\mathrm{E}u^2(a_2 = g) = p(\omega_1) \times [p(a_1 = h|\,\omega_1)\, u_2^{\omega_1}(h, g) + p(a_1 = b|\,\omega_1)\, u_2^{\omega_1}(b, g)]$
$+ p(\omega_2)\,[p(a_1 = h|\,\omega_1)\, u_2^{\omega_2}(h, g) + p(a_1 = b|\,\omega_2)\, u_2^{\omega_2}(b, g)]$
$\mathrm{E}u^2(a_2 = g) = p(a_1 = h|\,\omega_1)/2 = p(a_1 = h)/2$

Le gain espéré de 2 s'il joue d est :
$\mathrm{E}u^2(a_2 = d) = p(a_1 = b|\,\omega_2) = p(a_1 = b)$

$\mathrm{E}u^2(a_2 = g) > \mathrm{E}u^2(a_2 = d) \leftrightarrow p(a_1 = h)/2 > p(a_1 = b) \leftrightarrow p(a_1 = h)/2 > 1 - p(a_1 = h) \leftrightarrow p(a_1 = h) > 2/3$

Donc: 2 joue g si 1 joue h avec une proba $> 2/3$

$\Pr(\omega_1)\, u_2^{\omega_1}(h, d) + \Pr(\omega_1)\, u_2^{\omega_1}(b, d) + \Pr(\omega_2)\, u_2^{\omega_2}(h, d) + \Pr(\omega_2)\, u_2^{\omega_2}(b, d) = 1/2$

Le joueur 1:

le gain espéré de 1 s'il joue h est :

$\mathrm{E}u^1(a_1 = h) = p(\omega_1)\times[p(a_2 = g|\, \omega_1)\, u_1^{\omega_1}(h, g) + p(a_2 = d|\, \omega_1)\, u_1^{\omega_1}(h, d)]$
$+p(\omega_2)[p(a_2 = g|\, \omega_1)\, u_1^{\omega_2}(h, g) + p(a_2 = d|\, \omega_2)\, u_1^{\omega_2}(h, d)]$
$= p(a_2 = g|\, \omega_1)/2 = p(a_2 = g)/2 =$

le gain espéré de 1 s'il joue b est :

$\mathrm{E}u^1(a_1 = b) = p(\omega_1)\times[p(a_2 = g|\, \omega_1)\, u_1^{\omega_1}(b, g) + p(a_2 = d|\, \omega_1)\, u_1^{\omega_1}(b, d)]$
$+p(\omega_2)[p(a_2 = g|\, \omega_1)\, u_1^{\omega_2}(b, g) + p(a_2 = d|\, \omega_2)\, u_1^{\omega_2}(b, d)]$
$= p(a_2 = d|\, \omega_2) = p(a_2 = d)$

$\mathrm{E}u^1(a_1 = h) > \mathrm{E}u^1(a_1 = b) \longleftrightarrow p(a_2 = g)/2 > p(a_2 = d) \longleftrightarrow p(a_2 = g)/2 > 1 - p(a_2 = g) \longleftrightarrow p(a_2 = g) > 2/3$

Donc: 1 joue h si 2 joue g avec une proba $> 2/3$

Au total:

2 joue g si 1 joue h avec une proba >2/3

1 joue h si 2 joue g avec une proba >2/3

et vice versa

Faire une représentation graphiques pour faire apparaître les trois ENB en strétégies mixtes.

3 ENB en statégie mixte

Exercice 5

Soit le jeu BS (bataille des sexes) suivant:

		Joueur 2	
		a	b
Joueur 1	a	3, 1	0, 0
	b	0, 0	1, 3

a. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures ?

b. Quels sont les équilibres de Nash lorsque les stratégies mixtes sont autorisées

On considère maintenant le jeu dans lequel, à la première étape, le joueur 1 a la possibilité d'entrer dans le jeu BS ou de refuser, auquel cas les gains des joueurs sont $(2, 2)$.

c. Donner une représentation de ce jeu sous forme extensive et mettez le sous forme normale.

d. Quels sont les equilibres de Nash et les équilibres de Nash parfaits en sous jeux de ce jeu?

voir les exercices réalisés en cours

Exercice 6.

		Joueur 2	
		W	X
Joueur 1	Y	a, b	c, d
	Z	e, f	g, h

a. Donnez l'ensemble des joueurs et l'ensemble de stratégies de chaque joueur.

b. Quelles sont les conditions à poser sur a, b, c, d, e, f, g, h pour que (Z, W) soit un équilibre en stratégies dominantes ?

c. Quelles sont les conditions à poser sur a, b, c, d, e, f, g, h pour que (Z, W) soit un équilibre de Nash ?

d. Quelles sont les conditions à poser sur a, b, c, d, e, f, g, h pour que (Z, W) soit un optimum de pareto ?

voir le cours

Exercice 7.

Considérons le jeu en forme extensive présenté dans la Figure 1.

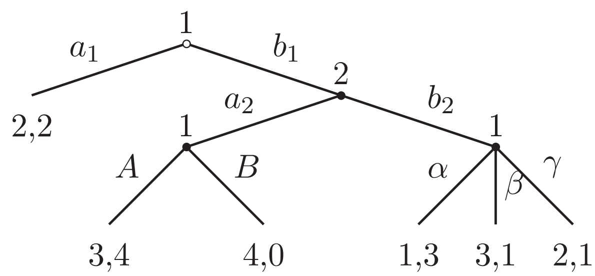

Figure 1: Le jeu

a. Représentez ce jeu sous forme normale.

b. Déterminez les équilibres de Nash.

c. Déterminez les équilibres de Nash parfaits en sous jeu.

a. Représentez ce jeu sous forme normale.

		Joueur 2	
		c	d
Joueur 1	a/·/·	2, 2	2, 2
	b/e/x	3,4	1,3
	b/e/y	3,4	3,1
	b/e/z	3,4	2,1
	b/f/x	4,0	1,3
	b/f/y	4,0	3,1
	b/f/z	4,0	2,1

b. Déterminez les équilibres de Nash.

unique EN en$(b/f/y;d)$

c. Déterminez les équilibres de Nash parfaits en sous jeu.

idem

Exercice 8.

Une unité de bien est mise aux enchères. Il y a $n > 2$ acheteurs potentiels et l'acheteur i accorde une valeur de v_i à cette unité de bien. La prodédure d'enchère est la suivante:

- Chaque acheteur i soumet une offre écrite x_i sous pli scellé.
- L'acheteur qui a soumis l'offre la plus élevée remporte le bien en payant la deuxième meilleure offre.
- En cas de plusieurs meilleures propositions identiques, le gagnant est tiré au sort entre les meilleurs enchérisseurs.

a. Modéliser cette compétition sous la forme d'un jeu en précisant les stratégies et les fonctions de paiement.

b. Montrer qu'offrir sa propre valeur est une stratégie dominante.

Correction

a. Modéliser cette compétition sous la forme d'un jeu en précisant les stratégies et les fonctions de paiement.

$I = \{1, ...n\}$
profil de stratégies $\{x_1, ..., x_i...x_n\}$

$$u_i = \begin{cases} v_i - \max_{x_j, j \neq i} x_j & \text{si } x_i > x_j, \forall j \neq i \\ \left(v_i - \max_{x_j, j \neq i} x_j\right) / (m+1) & \text{si } x_i \geq x_j, \forall j \neq i \text{ et } \exists m \text{ agents } u \neq i \text{ tq } x_i = x_u \\ 0 & \text{si } \exists j \neq i \text{ st } x_i < x_j \end{cases}$$

b. Montrer qu'offrir sa propre valeur est une stratégie dominante.

Considérons le joueur i et pour un profil de stratégies donné des autres joueurs.

Soit $\hat{x} = \max_{x_j, j \neq i} x_j$

Trois cas cont possibles:

- si $v_i > \hat{x}$ alors: si $x_i < \hat{x}$ $u_i = 0$, si $x_i = \hat{x}$ alors $u_i = 0$, si $x_i > \hat{x}$ alors $u_i = x_i - v_i > 0$. Dans ce dernier cas offrir $x_i = v_i$ lui rapporte son utilité max.
- si $v_i = \hat{x}$, l'utilité du joueur est nulle quelle que soit son enchère.
- si $v_i < \hat{x}$, si $x_i > \hat{x}$: $u_i = x_i - v_i < 0$, si $x_i = \hat{x}$ alors $u_i < 0$, si $x_i < \hat{x}$ alors $u_i = 0$. L'utilité est maximale dans ce dernier cas dont la stratégie $x_i = v_i$ est un cas particulier.

Dans tous les cas on voit qu'enchérir v_i est une stratégie dominante.